Date : / / Subject:

المحاضرة السادسة

المعادلة غير المتجانسة للذبذبات الحرة للوتر:

أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \; ; \; 0 < x < \ell \quad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = \varphi(x) , \; u_t(x,0) = \psi(x) \; ; \; 0 < x < \ell \; (2)$$

والشروط الحدية المتجانسة.

$$u(0,t) = 0 \; , \; u(\ell,t) = 0 \; ; \; t > 0 \; (3)$$

سوف نبحث عن حل المعادلة من الشكل

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \quad (4)$$

علماً أن $w(x,t)$ هي عبارة عن حل المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة والمحقق للشروط الابتدائية (2) والشروط الحدية (3)

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi}{\ell} a t + D_n \sin \frac{n\pi}{\ell} a t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \, d\xi \\ D_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^\ell \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \, d\xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

أما $v(x,t)$ هو عبارة عن الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة أي هو الحل الذي يحقق المعادلة (1) والشروط الحدية الصفرية (3) والشروط الابتدائية الصفرية الآتية:

$$v(x,0) = 0 \; , \; v_t(x,0) = 0 \; ; \; 0 \leq x \leq \ell \; (7)$$

سوف نبحث عن الحل بالشكل الآتي:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (8)$$

Date : / / Subject:

باعتبار t عند ذلك كبارامترولينفين الدالة $v(x,t)$ سينبغي أن نفض الدالة $T_n(t)$ التابعة ل t فقط :

نفرض الدالة $f(x,t)$ و الشروط الابتدائية بصورة سلاسل فورييه على الشكل التالي :

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi$$

باشتقاق العلاقة (8) بالنسبة ل (t)

$$v_t = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin n\frac{\pi}{l} x \quad (8)$$

$$v_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$v_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x\pi}{l}\right) T_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

نبدل هذه القيم في المعادلة التفاضلية (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right] \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

وبالمطابقة نحصل على :

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (9)$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية و خطية .

Date : / / Subject:

من الشرط الابتدائية (7) والعلاقة (8) نحصل على الشروط الابتدائية الصفرية الآتية :

$$0=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x \Rightarrow T_n(0)=0$$

من (7) و (8) نحصل على :

$$0=\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x \Rightarrow T_n'(0)=0 ; n=1,2,\ldots \quad \Big\} (10)$$

وهذا ان الشرطان الإضافيان يحددان حل المعادلة (١)

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=0$$

المعادلة المميزة

$$r^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2=0 \Rightarrow r^2=\left(\frac{n\pi a}{l}\right)i^2 \Rightarrow r=\mp\frac{n\pi a}{l}$$

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t \quad (11)$$

لإيجاد الحل للمعادلة غير المتجانسة (٥) نطبق طريقة تحويل الثوابت وذلك كما يلي :

$$A_n'\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n'\sin\frac{n\pi a}{l}t=0$$

$$A_n'\left(\frac{n\pi a}{l}\right)\sin\frac{n\pi a}{l}t+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)B_n'\cos\left(\frac{n\pi a}{l}\right)=$$

$$f_n(t)$$

لحل هذه المعادلات وباستخدام الشروط (10) المرافقة نحصل على A_n, B_n

نبدل قيم هذه الثوابت في العلاقة (11) نحصل على العلاقة الآتي :

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right] f_n(\tau)\,d\tau$$

نبدل $T_n(t)$ بما يساويها من العلاقة (8) فنحصل على الحل الخاص المطلوب :

Date : / / Subject:

في التطبيقات العلمية حل المسألة المطروحة يعطى بالدستور

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi}{\ell} at + D_n \sin \frac{n\pi}{\ell} at\right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

علماً أن : $D_n = \square$, $C_n = \square$

حيث $T_n(t) = \frac{\ell}{n\pi a} \int_0^{\ell} \sin \left[\frac{n\pi a}{\ell} [t-\tau]\right] f_n(\tau)\, d\tau$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \, d\xi$$

المسألة العامة الحدية الأولى تحول المعادلة إلى معادلة حدية بشروط حدية صفرية :

نص المسألة : أوجد حل المعادلة .

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \; ; \; 0 < x < \ell , t > 0 \quad (1)$$

والمحققة للشروط الإبتدائية

$$u(x,0) = \varphi(x) \; u_t(x,0) = \psi(x) ; \; 0 \leq x \leq \ell \; (2)$$

والشروط الحدية $u(0,t) = \mu_1(t) , u(\ell,t) = \mu_2(t) \; ; t \geq 0 \; (3)$

الحل: سوف نبحث عن حل من الشكل

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t) \quad (4)$$

علماً أن $v(x,t)$ دالة مجهولة جديدة وهي عبارة عن انحراف الدالة $u(x,t)$ عن دالة معلومة $U(x,t)$.

فنشتق العلاقة (4) مرتين بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ونعوض في ①

$$u_t = U_t(x,t) + v_t(x,t) \quad (4$$

$$u_{tt} = U_{tt}(x,t) + v_{tt}(x,t)$$

Date : / / Subject:

$$u_x = U_x(x,t) + v_x(x,t)$$

$$u_{xx} = U_{xx}(x,t) + v_{xx}(x,t)$$

$$U_{tt} + v_{tt} = a^2 U_{xx} + a^2 v_{xx} + f(x,t)$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + [a^2 U_{xx} - U_{tt} + f(x,t)]$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x,t) \quad (5)$$

وبالتالي نحصل على معادلة جديدة تعطى بالعلاقة (5) وتحقق الشروط الابتدائية الجديدة الآتية (من العلاقة (2)،(4)):

$$\varphi(x) = U(x,0) + v(x,0) \Rightarrow v(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) = \bar{\varphi}(x)$$

من (2) ، (4) نجد

$$\psi(x) = U_t(x,0) + v_t(x,0) \Rightarrow v_t(x,0) = \psi(x) - U_t(x,0) = \bar{\psi}(x) \quad (6)$$

والشروط الحدية تأخذ الشكل الآتي من (3) ، (4)

★ $\mu_1(t) = U(0,t) + v(0,t) \Rightarrow v(0,t) = \mu_1(t) - U(0,t) = \bar{\mu}_1(t)$

★ $\mu_2(t) = U(\ell,t) + v(\ell,t) \Rightarrow v(\ell,t) = \mu_2(t) - U(\ell,t) = \bar{\mu}_2(t)$

نختار الدالة $U(x,t)$ بحيث يكون $\bar{\mu}_1(t) = 0 ، \bar{\mu}_2(t) = 0$

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\ell}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

وبالتالي نحصل على شروط حدية صفرية:

$$v(0,t) = 0 , v(\ell,t) = 0 \quad (7)$$

أي وصلنا إلى مسألة حدية جديدة (5)،(6)،(7) وشروط حدية صفرية

ملاحظة: إذا أعطيت الشروط الحدية على الشكل الآتي:

$$u(0,t) = \mu_1(t) \quad u_x(\ell,t) = \mu_2(t)$$

في هذه الحالة نأخذ الدالة $[U(x,t) = \mu_1(t) + x\mu_2(t)]$

Date : / / Subject:

والمجموع يبدأ من ٥ أي $\sum_{x,0}^{\infty}$ ثم نبدل كل n بـ $\left(\frac{2n}{2}\right)$

المسألة الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً :

إن المسألة الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً أي عندما لا تتعلق الشروط الحدية والطرف الأيمن للمعادلة على الزمن :

والمسألة تأخذ الشكل الآتي:

عين حل المعادلة :

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f_0(x) ; 0 < x < \ell \quad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , u_t(x,0) = \psi(x) ; 0 \leq x \leq \ell \quad (2)$$

والشروط

$$u(0,t) = u_1 \; ; \; u(\ell,t) = u_2 \quad ; t \geq 0 \quad (3)$$

سوف نبحث عن حل في صورة المجموع

$$u(x,t) = U(x) + v(x,t) \qquad (4)$$

علماً أن $U(x)$ الحالة المستقرة للوتر المعرفة بالشروط

$$\left.\begin{aligned} & a^2 U'' + f_0(x) = 0 \\ & U(0) = u_1 \quad U(\ell) = u_2 \end{aligned}\right\} (5)$$

و $v(x,t)$ الانحراف عن الحالة المستقرة وهذه الدالة تحدد من حل المسألة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

بالشروط الابتدائية (من (4),(2))

$$\varphi(x) = U(x) + v(x,0) \Rightarrow v(x,0) = \varphi(x) - U(x) = \bar{\varphi}(x)$$

$$\psi(x) = v_t(x,0) \Rightarrow v_t(x,0) = \psi(x) = \bar{\psi}(x)$$

والشروط الحدية الصفرية (من (5),(4),(3))

Date : / / Subject:

$$u_1 = u_1 + v(0,t) \Rightarrow v(0,t) = 0$$
$$u_2 = u_2 + v(l,t) \Rightarrow v(l,t) = 0$$

وبالتالي حل المسألة الحدية يعطى بالدستور:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\varphi}(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \bar{\psi}(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi$$

. تحديد الدالة $U(x)$ أي حل المعادلة (5)

. المعادلة في (5) تكتب بالشكل

$$U''(x) = \frac{-1}{a^2} f_0(x)$$

. نكامل

$$U'(x) = \frac{-1}{a^2} \int_0^x f_0(\xi) \, d\xi + C_1$$

. نكامل مرة ثانية:

$$U(x) = \frac{-1}{a^2} \int_0^x \left(\int_0^z f_0(\xi) \, d\xi \right) dz + C_1 x + C_2$$

. من الشروط الموافقة ومن عبارة الحل العام نحصل على

$$\boxed{u_1 = C_2}$$

$$u_2 = \frac{-1}{a^2} \int_0^l \int_0^z f_0(\xi) \, d\xi \, dz + C_1 l + u_1$$

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{l} + \frac{1}{a^2 l} \int_0^l \int_0^z f_0(\xi) \, d\xi \, dz$$

. نبدل C_1 ، C_2 بما ساويناهما في عبارة الحل العام فنحصل على:

Date : / / Subject:

$$U(x) = U_1 + \frac{x}{\ell}(u_2 - u_1) + \frac{x}{a^2 \ell}\int_0^{\ell}\int_0^{z} f_0(\xi)\, d\xi\, dz$$
$$-\frac{1}{a^2}\int_0^{x}\int_0^{z} f_0(\xi)\, d\xi\, dz$$

حالة خاصة: إذا كانت الدالة: $f_0(x) = A$ حيث A مقدار ثابت في هذه الحالة سوف نجد أن الدالة $U(x)$ فتصبح المسألة:

$$a^2 U'' + A = 0$$
$$U(0) = u_1 \;,\; u(\ell) = u_2$$
$$U'' = \frac{-1}{a^2} A \Rightarrow U' = \frac{-A}{a^2} x + C_1$$

$$U = \frac{-A}{2a^2} x^2 + C_1 x + C_2$$

من الشروط المرافقة

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= C_2 \\ u_2 &= \frac{-A\ell^2}{2a} + C_1 \ell + C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ell} + \frac{A\ell}{2a^2}$$

$$U(x) = \frac{-A}{2a^2} x^2 + \left(\frac{u_2 - u_1}{\ell}\right) + \frac{A\ell}{2a^2}) x + u_1$$

أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad ; 0 < x < \ell \quad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0$ (2)

الشروط الحدية $u(0,t) = 0,\; u(\ell,t) = A \sin \omega t,\; t > 0$ (3)

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

Sabbagh

Date : / /   Subject:

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\ell}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$$
$$= 0 + \frac{x}{\ell}(A\sin wt - 0) = \frac{x}{\ell} A\sin wt$$

$$U(x,t) = \frac{A}{\ell} x \sin wt$$
$$u(x,t) = \frac{A}{\ell} x \sin wt + v(x,t) \quad (4)$$

فنشتق مرتين بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x^2 ونبدل في الحل العام

مثال: أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = u_{xx} + 2t \quad , 0<x<1 , t>0 \quad (1)$$

والمحققة للشروط الابتدائية $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x, 0\leq x\leq 1 \ (2)$

الشروط الحدية $u(0,t)=0, u_x(1,t)=t, t\geq 0 \ (3)$

الحل: سوف نبحث عن الحل من الشكل:

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

علماً أن $u(x,t) = \mu_1(t) + x\,\mu_2(t) = x\,t$

$$u(x,t) = x\,t + v(x,t) \quad (4)$$

نشتق (4) مرتين بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x:

$$u_t = x + v_t(x,t) \quad (4)$$
$$u_{tt} = v_{tt}$$
$$u_x = t + v_x$$
$$u_{xx} = v_{xx}$$

نبدل في المعادلة

$$v_{tt} = v_{xx} + 2t \quad (5)$$

والدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الابتدائية الجديدة الآتية (من (2)، (4))

$$0 = 0 + v(x,t) \Rightarrow v(x,0) = 0$$
$$x = x + v_t(x,0) \Rightarrow v_t(x,0) = 0$$

Date : / / Subject:

الدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الابتدائية الصفرية

$$v(x,0)=0, \quad v_t(x,0)=0 \quad (6)$$

وأيضاً الدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الحدية الصفرية

$$u(0,t)=v_x(1,t)=0 \quad (7)$$

وبالتالي حل المسألة (5)، (6)، (7) عبارة عن معادلات ذبذبات الوتر غير المتجانسة بشروط حدية صفرية حلها يعطى بالشكل

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_n \cdot \cos \lambda_n . a t + D_n \sin \lambda_n . a t \sin . \lambda_n t +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x$$

حيث $\lambda_n=(x\pi+\frac{\pi}{2})$

بما أن الشروط الابتدائية صفرية فإن

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) . \sin \lambda_n x$$

وذلك لأن $C_n=D_n=0$

$$T_n(t)=\frac{1}{\lambda_n . a}\int_0^t \sin(\lambda_n . a(t-\tau) f_n(\tau) d\tau$$

حيث $\ell=1, \ a=1$

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi,t) \sin \lambda_n \xi \, d\xi$$

$$f_n(t)=2\int_0^1 2t \sin \lambda_n \xi . d\xi$$

$$=4t\left[\frac{-1}{\lambda_n}\cos \lambda_n \xi\right]_0^1=$$

$$f_n(t)=\frac{-4t}{\lambda_n}(\cos \lambda_n - 1)=\frac{4t}{\lambda_n}$$

$$\cos \lambda_n = \cos(n\pi+\frac{\pi}{2})=\cos(n\pi)\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0}-\sin(n\pi) \quad \text{لأن} = 0$$

Date : / / Subject:

$$T_n(t) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin(\lambda_n(t-\tau))\,\frac{4\tau}{\lambda_n}\,d\tau$$

$$= \frac{4}{(\lambda_n)^2}\int_0^t \underset{u}{\tau}\,\sin(\lambda_n t - \lambda_n\tau)\,d\tau$$

$$v = \frac{1}{\lambda_n}\cos(\lambda_n t - \lambda_n\tau)$$

$$= \frac{4}{(\lambda_n)^2}\left[\frac{1}{\lambda_n}\cos(\lambda_n t + \lambda_n\tau)\,\tau\Big|_0^t - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \cos(\lambda_n t - \lambda_n\tau)\,d\tau\right.$$

أوجد حل المعادلة :

$u_{tt} = 4u_{xx} - 4\sin 2t + \sin 2x$ (1)

والمحقق للشروط الابتدائية (2) $u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 2$

الشروط الحدية (3) $u(0,t) = \sin 2t,\ u(\pi,t) = \sin 2t$

سوف نبحث عن الحل وفق الشكل

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$$

$$U(x,t) = \sin 2t$$

$$u(x,t) = \sin 2t + v(x,t) \quad (4)$$

نشتق مرتين بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x

$$u_t = 2\cos 2t + v_t$$

$$u_{tt} = -4\sin 2t + v_{tt}$$

$$u_x = v_x$$

$$u_{xx} = v_{xx}$$

Date : / / Subject:

$$-4\sin 2t + v_{tt} = 4v_{xx} - 4\sin 2t + \sin 2x$$

$$v_{tt} = 4v_{xx} + \sin 2x \quad (5)$$

والدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الابتدائية (من (2) و (4))

$$\left.\begin{array}{l}\sin x = 0 + v(x,0) \Rightarrow v(x,0) = \sin x \\ 2 = 2(1) + v_t(x,0) \Rightarrow 2 = 2 + v_t(x,0)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

(sin(0), cos(0))

$$v(0,t) = \sin x, \; v_t(x,0) = 0 \quad (6)$$

والدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الحدية الصفرية

$$v(0,t) = 0, \; v(\pi, t) = 0 \quad (7)$$

حل المسألة الحدية الجديدة (5)،(6)،(7) نعوض بالدستور

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t\right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$\star \quad C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \, d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \xi \cdot \sin n\xi \, d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-1}{2} \left[\cos(1+n)\xi - \cos(1-n)\xi\right] d\xi$$

$$C_n = \frac{-1}{\pi} \left[\frac{1}{1+n} \sin(1+n)\xi - \frac{1}{1-n} \sin(1-n)\xi\right]_0^{\pi} = 0 \quad n \neq 1$$

(مقام صفر)

أما في حالة $n = 1$:

$$C_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \xi \, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\xi) \, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \xi \Big]_0^{\pi} = 1 \Rightarrow C_n = \begin{cases} 0 ; & n \neq 1 \\ 1 ; & n = 1 \end{cases}$$

Date : / /

Subject:

$\psi(x)=0$: لأن $D_n = 0$

$$T_n(t) = \frac{\ell}{n\pi a} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi a}{\ell}(t-\tau)\right) f_n(\tau)\, d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \, d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2\xi \cdot \sin n\xi \, d\xi$$

بالعودة إلى التكامل الأول

$$= 0 ;\ n \neq 2$$

أما في حالة $n = 2$:

$$n=2 \Rightarrow f_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 2\xi \, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos 4\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \xi \Big|_0^\pi = 1$$

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 ; n \neq 2 \\ 1 ; n = 2 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$T_n(t) = 0 ,\ n \neq 2$$

لأن $f_n(\tau) = 0$ من أجل كل τ $T_n(t) = 0$

$$n=2 : T_2(t) = \frac{1}{4} \int_0^t \sin(4t - 4\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\cos(4t - 4\tau)\right]_0^t$$

$$T_2(t) = \frac{1}{16}(1 - \cos 4t)$$

Date : / / Subject:

$v(x,t) = \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4t) \sin 2x$

$u(x,t) = \sin 2t + \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4t) \sin 2x$